

1. kolokvij iz matematike
6.11.1990



1. V množici $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ vseh parov naravnih števil vpeljemo relacijo \sim z enim od naslednjih predpisov:

- a) $(a,b) \sim (c,d)$, če je $a = c$
- b) $(a,b) \sim (c,d)$, če je $\{a,b\} \cap \{c,d\} \neq \emptyset$
- c) $(a,b) \sim (c,d)$, če je $a + b = c + d$

za vsak primer posebej si v koordinatni ravnini predočite množico parov (a,b) , ki so v relaciji \sim s parom $(3,2)$ ter ugotovite, ali je relacija \sim ekvivalenčna.

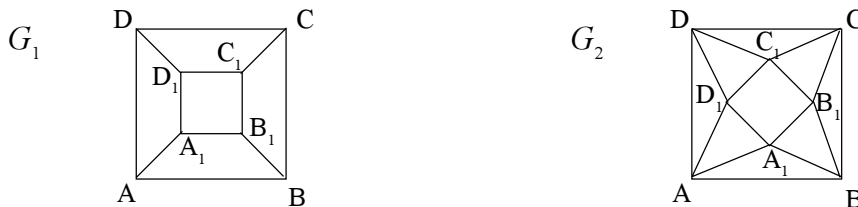
2. Dani sta funkciji $f: \mathbf{N} \rightarrow [0,1]$ in $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$, definirani s predpisoma $f(n) = n/(n+1)$ za $n \in \mathbf{N}$ in $g(x) = 2x - x^2$ za $x \in [0,1]$.

- a) za vsako od njiju ugotovite, ali sta surjektivni oziroma injektivni. Odgovor utemeljite.
- b) izračunajte kompozitum $g \circ f$. Ali obstaja $(g \circ f)^{-1}$?

3. Trije ocenjevalci sestavijo vsak svoj prednostni vrstni red za n kandidatov ($n \geq 2$). Kandidat je izbran, če ga vsaj dva ocenjevalca postavita na prvo mesto v svojem seznamu.

- a) Koliko je vseh možnih poročil, sestavljenih iz vseh treh seznamov?
- b) Koliko pa je takih poročil, na osnovi katerih je nekdo izmed kandidatov izbran?

4. Dana sta dva grafa na osmih točkah



Ali sta grafa G_1 in G_2 izomorfna? Ali je kateri od njiju regularen? Dvodelen? Ali kateri premore Eulerjev obhod? Poiščite komplementarna grafa $h G_1$ in G_2 .

1. kolokvij iz matematike

5. 11. 1991

1. Dana je neprazna množica S in v njej neprazna podmnožica E . Kakšne lastnosti (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost) imajo naslednje relacije R_1, R_2, R_3 med množicami:

$$R_1: A \cap B = E$$

$$R_2: A \cup E = B \cup E$$

$$R_3: A \cap E \subset B \cap E$$

Ali je med njimi katera ekvivalenčna?

2. Naj bo $f: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ in $g: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Izračunajte kompozitum $f \circ g$ in pokažite, da so funkcije f, g in $f \circ g$ bijekcije.

b) Poiščite inverzne preslikave $f^{-1}, g^{-1}, (f \circ g)^{-1}$ in $g^{-1} \circ f^{-1}$. Kaj opazite?

3. Koliko različnih štirimestnih števil lahko napišemo z lihimi ciframi 1, 3, 5, 7 in 9,

a) če se cifre lahko poljubno ponavljajo, vendar morajo nastopati v naravnem (naraščajočem) vrstnem redu;

b) če se cifre lahko ponavljajo, vendar enaki cifri ne smeta stati skupaj;

c) če se vsaka cifra lahko ponovi kvečjemu še enkrat?

4. Naj bo G povezan graf na n točkah in \bar{G} njegov komplementarni graf. Poiščite vse primere, ko sta oba grafa G in \bar{G}

a) cikla

b) drevesi

c) taka, da imata Eulerjev obhod.

Če ne gre za poljuben n , rešite nalogo vsaj za $n = 4$ in $n = 5$.

1. kolokvij iz matematike za biologe

10. 11. 1992

1. V množici naravnih števil \mathbf{N} naj velja relacija $x \sim y$, če dasta števili x in y isti ostanek pri deljenju s 3. Pokažite, da je \sim ekvivalenčna relacija v \mathbf{N} . Poiščite ekvivalenčne razrede in ugotovite moč faktorske množice.

2. Naj bo $S = \{1, 2, 3\}$, \mathcal{P} njena potenčna množica in $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$, $g: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ preslikavi, definirani s predpisoma:

$$f(A) = S \setminus A \text{ in } g(A) = A \cap \{1, 2\}.$$

- Pokažite, da je preslikava f bijekcija in izračunajte f^{-1} .
- Poiščite zalogo vrednosti preslikave g . Ali je g surjekcija? Ali je g injekcija?
- Določite kompozita $f \circ g$ in $g \circ f$.

3. Pet fantov in pet deklet igra družabno igro, v kateri potrebujejo sodnika in tri tekmovalne trojice. Na koliko različnih načinov lahko izberejo sodnika in vse tri ekipe,

- če ni nobenih omejitev,
- če tekmovalci v isti ekipi ne smejo biti vsi istega spola?

4. Polni dvodelni graf $K_{m,n}$ je dvodelni graf $g = V_1 \cup V_2$ ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$, V_1 ima m točk, V_2 pa n točk) z maksimalnom možnim številom povezav. Odgovorite na naslednja vprašanja:

- Kdaj je polni dvodelni graf regularen?
- Kdaj ima polni dvodelni graf Eulerjev obhod in kdaj Eulerjev sprehod?
- Kaj je komplement polnega dvodelnega grafa?
- Kdaj je polni dvodelni graf drevo?

1. kolokvij iz matematike za biologe

11. 11. 1993

1. Simetrično razliko Δ dveh množic A in B definiramo s predpisom $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Vsaka izmed naslednjih enakosti definira neko relacijo med množicami:

$$R_1: A \Delta B = A \cup B$$

$$R_2: A \Delta B = A \setminus B$$

$$R_3: A \Delta B = A$$

$$R_4: A \Delta B = 0$$

Za vsako od teh relacij ugotovite, kdaj velja (izrazite jo na drug način) in ugotovite njene lastnosti (refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost, tranzitivnost). Ali je katera od njih ekvivalenčna?

2. Preslikavi $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ in $g: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ sta podani s predpisoma

$$f(x,y) = (1-x, 2y), \quad g(x,y) = (y,x)$$

za vsak $x,y \in \mathbf{R}$. Pokažite, da sta f in g bijekciji iz $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, določite inverzni preslikavi f^{-1} in g^{-1} ter kompozita $f \circ g$ in $g \circ f$.

3. Na nekem otoku živi 8 vrst redkih ptic. Dva znanstvenika dobita dovoljenje, da vsak od njiju ulovi tri ptice, ne glede na to, kateri vrsti pripadajo.

a) na koliko različnih načinov lahko to storita, če ne veta drug za drugega?

b) koliko pa je takšnih primerov, da ulovita skupaj šest različnih vrst ptic?

4. Trikotnik nima nobene diagonale, v kvadratu sta dve, v pravilnem petkotniku jih je 5 itd. Z matematično indukcijo dokažite, da je v pravilnem n -kotniku ($n \geq 3$) število diagonal enako $(n(n-3))/2$.

1. kolokvij iz matematike za biologe

3. 11. 1994

1. Za vsako od naslednjih relacij v množici realnih števil \mathbf{R} ugotovite, ali je reflektivna, simetrična, antisimetrična in tranzitivna ter načrtajte njen graf v \mathbf{R}^2 .

Odgovore utemeljite.

a) xR_1y , če $x^2 = y^2$

b) xR_2y , če $x^2 + y^2 < x + y$

c) xR_3y , če $(x - y)^2 < 1$.

2. Imejmo neprazno množico A in preslikavi $f: A \rightarrow A \times A$ in $g: A \times A \rightarrow A$, definirani s predpisoma $f(x) = (x, x)$ in $g(x, y) = x$ za poljubna $x, y \in A$.

Pokažite, da je preslikava f injektivna, g pa surjektivna, ter izračunajte njuna kompozituma $f \circ g$ in $g \circ f$. Kakšne lastnosti imata preslikavi $f \circ g$ in $g \circ f$?

3. Na koliko različnih načinov lahko izmed 16 darovalcev krvi, od katerih jih ima 5 krvno skupino AB, 4 krvno skupino A, 4 krvno skupino B in 3 krvno skupino 0, izberemo:

a) po tri darovalce iz vsake skupine,

b) tri darovalce, ki lahko dajo kri ponesrečencu s krvno skupino A,

c) tri darovalce z različno krvno skupino.

4. Z matematično indukcijo dokažite, da je

a) $1 + 2 + 3 + \dots + n = n(n + 1)/2$

b) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

1. kolokvij iz matematike za biologe
9. 11. 1995

1. Funkciji $f, g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sta podani s predpisoma

$$f(x) = 1 - 2x, \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

- Načrtajte grafa funkcij f in g ter določite njuni zalogi vrednosti.
- Ali je katera od funkcij surjektivna? Injektivna? Bijektivna?
- Poiščite oba kompozita $f \circ g$ in $g \circ f$.

2. Ob robu vrta bi radi posadili 4 okrasne grme v ravni črti. Na razpolago imamo tri vrste grmovnic. Na koliko načinov lahko to storimo, če

- je pomembno, kje raste kateri grm,
- vrstni red (različnih) grmov ni važen?

3. Z matematično indukcijo dokažite, da za vsako naravno število $n \geq 1$ velja

a) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, če je $x > -1$,

b) $\binom{2n}{n} \leq 2^{2n-1}$.

4. Pokažite, da je s predpisom

$$x \oplus y = (x + y)/(1 + xy)$$

dana notranja operacija v množici $[0, 1] = \{x \in \mathbf{R}; 0 \leq x \leq 1\}$, ki je asociativna in komutativna. Poiščite nevtralni element. Ali je množica $[0, 1]$ za to operacijo grupa?